جامعة البعث
كلية العلوم
قسم الرياضيات

امتحان الفصل الاول 2017 – 2016
المقرر : نظرية الأعداد

المدة :ساعة ونصف
الدرجة : 100

السؤال الأول(40 درجة) :

ليكن $a,b,m \in Z$ ، والمطلوب:

١) أثبت أن باقي قسمة a^2 على العدد 3 هو 0 أو 1.

٢) استنتج أن العدد $(3a^2 - 1)$ لا يمكن أن يكون مربعا لأي عدد صحيح.

٣) إذا كان $d(a,m) = d(b,m) = 1$ فأثبت أن: $d(ab,m) = 1$.

السؤال الثاني (25 درجة) :

١) اكتب القاسم المشترك الأعظم للعددين: 36 ; 28 ، كتركيب خطي لهما.

٢) حل المعادلة: $28x + 36y = 20$ ، وأوجد حلولها الموجبة (في حال وجودها).

السؤال الثالث(35 درجة) :

١) إذا كان m عددا طبيعيا أوليا نسبيا مع العدد الصحيح a فأثبت أن :

$a^{\varphi(m)} \equiv 1 \pmod{m}$ حيث $\varphi(m)$ قيمة دالة أولر من أجل العدد m.

٢) أوجد مرتبة العدد 4 بالمقاس 13 ، وبين إن كان جذراً أولياً (أصلياً) للعدد 13.

٣) بين إن كان العدد: $(3^{439} - 2)$ يقبل القسمة على العدد 5 أم لا.

د . ياسين خلوف

٦/٢/٢٠١٧

سلم تصحيح نظرية الأعداد
الفصل الأول ٢٠١٦ - ٢٠١٧

السؤال الأول (40)

1) عند قسمة أي عدد صحيح a على 3 نحصل على إحدى الصيغ الآتية:

(i): $a = 3q, q \in \mathbb{Z} \Rightarrow a^2 = 9q^2 = 3(3q^2) = 3k ; k \in \mathbb{Z}$
وهنا والباقي صفر

(ii): $a = 3q+1, q \in \mathbb{Z} \Rightarrow a^2 = 9q^2+6q+1 = 3(3q^2+2q)+1 = 3k+1, k \in \mathbb{Z}$
وهنا نلاحظ أن باقي قسمة a^2 على 3 هو 1.

(iii) $a = 3q+2 ; q \in \mathbb{Z} \Rightarrow a^2 = 9q^2+12q+4 = 3(3q^2+4q+1)+1 = 3k+1$
حيث $k = 3q^2+4q+1 \in \mathbb{Z}$ والباقي أيضاً 1.
إذن باقي قسمة a^2 على 3 هو صفر أو 1. أي أن
$a^2 \equiv 0$ or $1 \pmod 3$

2) لو كان $(3a^2-1)$ مربعاً لعدد صحيح لوجب أن يكون له إحدى الصيغتين:

$(3a^2-1) = 3k \Rightarrow 3a^2-3k = 1 \Rightarrow 3|1$ وهذا مستحيل (5)
or
$(3a^2-1) = 3k+1 \Rightarrow 3a^2-3k = 2 \Rightarrow 3|2$ وهذا مستحيل أيضاً (5)
إذن $(3a^2-1)$ لا يمكن أن يكون مربعاً لأي عدد صحيح.

3) $d(a,m) = 1 \Rightarrow \exists x, y \in \mathbb{Z} : ax + my = 1 \Rightarrow b(ax) + b(my) = b$ (5)
لو فرضنا $0 < d_1 | ab$ و $d_1 | m$ لوجب أن يكون $d_1 | (ab)x + m(by) = b$ (5) وبالتالي
$d_1 | m$ و $d_1 | b$ نتيجة $d_1 | d(b,m) = 1$ (5) فإذاً $d_1 = 1$ ومنه $(ab,m) = 1$

السؤال الثاني (25)

1)
$36 = 1 \cdot 28 + 8$
$28 = 3 \cdot 8 + 4$
$8 = 2 \cdot 4 + 0$
$\Rightarrow d(36,28) = 4$ (5) $4 = 28 - 3 \cdot 8 = 28 - 3(36-28) \Rightarrow$
$4 = 4(28) + (-3)(36)$ (5) $(*)$

2) نضرب $(*)$ بـ 5 فنجد أن
$20 = (20)(28) + (-15)(36)$ وعندئذٍ
يكون $x_0 = 20, y_0 = -15$ حل خاص للمعادلة (5) والحل العام
أي $x = x_0 + \frac{36}{4} t$, $t \in \mathbb{Z}$
$y = y_0 - \frac{28}{4} t$

$x = 20 + 9t$
$y = -15 - 7t$

(5)

ولكي يكون للمعادلة حلول موجبة لا بد أن يكون $x>0$ و $y>0$ أي أن:

$$\left.\begin{array}{l}20+9t>0\\ -15-7t>0\end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{l} t>\frac{-20}{9}\\ t<\frac{-15}{7}\end{array}, \quad t\in Z$$

ونلاحظ عدم وجود أي عدد صحيح يحقق هذا الشرط لذلك لا يوجد حلول موجبة

5

السؤال الثالث (35)

1) إن رتبة زمرة أويلر $U(Z_m)$ هي:

$$|U(Z_m)| = \varphi(m)$$

وإن $d(a,m)=1 \iff \bar{a}\in U(Z_m)$ (أي a, m أوليان نسبياً).

5

وحسب مبرهنة لاغرانج يكون $(\bar{a})^{\varphi(m)} = \bar{1}$ وبالانتقال إلى صيغة التطابقات نجد أن:

$$(a)^{\varphi(m)} \equiv 1 \pmod m$$

5

2) مرتبة العدد 4 بقياس 13 يجب أن تكون قاسمة لرتبة الزمرة $U(Z_{13})$ أي مرتبة 4 قاسمة لـ $\varphi(13) = 12$، وحيث أن قواسم 12 هي $\{1,2,3,4,6,12\}$ فنبحث عن الرتبة من بين هذه القواسم:

5

$$(4)^2 = 16 \equiv 3 \pmod{13} \quad , \quad (4)^4 \equiv 9 \pmod{13}$$

$$(4)^3 \equiv 12 \pmod{13} \quad , \quad (4)^6 \equiv 1 \pmod{13} \Rightarrow |4| = 6$$

5

رتبة 4 هي $6 \neq \varphi(13)$، ولذلك 4 ليس جذراً أولياً لـ 13.

3)

$$439 = 4(109)+3 \Rightarrow (3)^{439} = (3^4)^{109}\cdot 3^3 \equiv$$

5

$$\equiv (1)^{109}\cdot(3)^3 \pmod 5 \equiv 2 \pmod 5$$

5

إذن $5 \mid (439-2)$

هذا حل الطالب بأية طريقة أخرى تتوزع الدرجات بما يتطابق مع هذا السلم

Scanned by CamScanner